

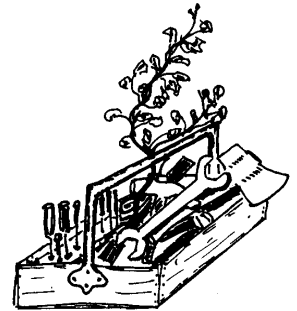
# Unterrichtsprojekte Natur und Technik



Vinnhorster Weg 2  
30419 Hannover

Telefon: 0511-168-47665/7  
Fax: 0511-168-47352  
E-mail: 40.50@hannover-stadt.de

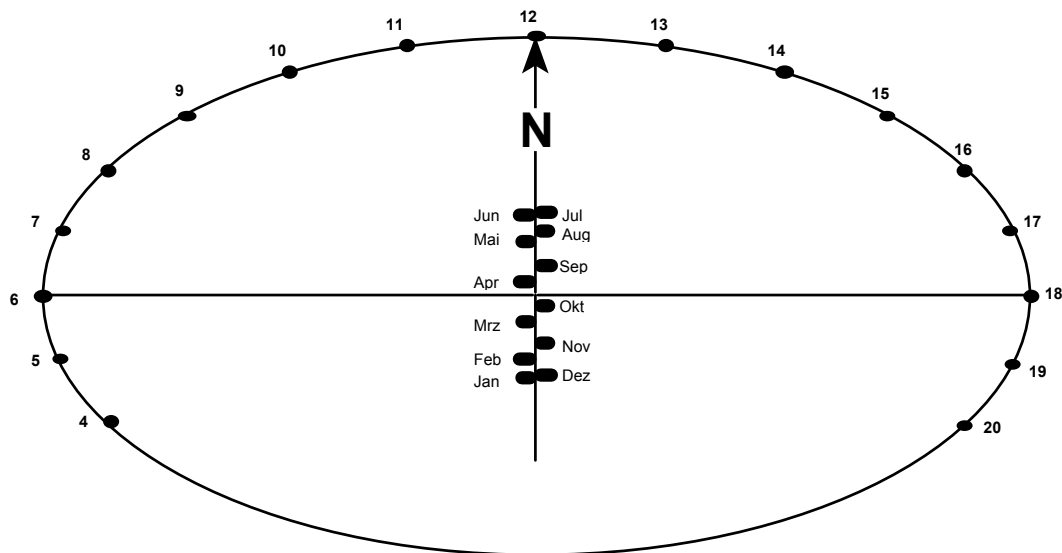
Internet:  
www.schulbiologiezentrum-hannover.de



## 19.35

**Zum Selbstbau  
für fächerübergreifenden Unterricht,  
Arbeitsgemeinschaften, Projektwochen  
und Schullandheimaufenthalte:**

### Die Sonnenuhr auf dem Schulhof (und anderswo) (Materialien, Berechnungsgrundlagen)



Diese Arbeitshilfe beschreibt die Konstruktion und Berechnung einer Sonnenuhr auf einer horizontalen Fläche (z.B. einem Schulhof). Der Schattenwerfer oder Zeiger ist hier der nach der Uhrzeit fragende Mensch selbst. Da er aufrecht steht, handelt es sich um eine sogenannte "analematische" Sonnenuhr, im Gegensatz zur klassischen Sonnenuhr, bei der der Schattenstab zum Himmelsnordpol, also der Erdachse parallel, geneigt ist.

Die Berechnung ist, wenn Sie die nachstehend genannten Formeln nur anwenden und nicht herleiten, einigermaßen simpel. Wer aber nur den Taschenrechner ansetzt, hat von den den Formeln innewohnenden Phänomenen nichts gesehen. Und dies wäre besonders schade, weil die Phänomene eben so gut sichtbar sind (Sonnenschein, Zeit und Geduld vorausgesetzt!).

Deshalb wollen wir Ihnen zwei Varianten anbieten: Die erste ist eine vom Blick auf die Sonne und die Zeit ausgehende Konstruktion mit Bleistift, Lineal, Geodreieck und Zirkel. Unsere Sonnenuhr kann auch gleich draußen an Ort und Stelle "erschaffen" werden, wenn wir zu den richtigen Zeitpunkten den Schattenwurf des Zeigers markieren.

Der zweite Weg, der sich im zeitknappen Schulalltag, bei häufigem Grauwetter und zur Überprüfung der empirisch gefundenen Stundenmarken anbietet, ist der mathematisch-konstruktive. Hier kommen wir zu exakteren Maßen und Zeitangaben, müssen die Theorie vielleicht aber Leuten wie dem französischen Mathematiker Lalande überlassen, der 1757 das Formelwerk zur analemmatischen Sonnenuhr veröffentlichte.

Welcher Methode Sie den Vorzug geben oder ob und wie Sie beide miteinander kombinieren, müssen Sie selbst entscheiden.

### **Einige Bemerkungen vorweg:**

Sonnenuhren zeigen die "wahre Sonnenzeit" an. Die "wahre Sonnenzeit" ist die auf die scheinbare Sonnenbewegung bezogene lokale Zeit. Sie gilt nur für den Meridian (Längengrad), auf dem wir uns befinden, und stimmt mit der "bürgerlichen" (Zonen-) Zeit nur in Ausnahmefällen überein. Sonnen- und Armbanduhr machen meistens unterschiedliche Zeitangaben! Unerlässlich ist es daher, sich mit Begriffen wie "Gesetzlicher Zonenzeit", "Sommerzeit", "Mittlerer Ortszeit" und "Wahrer Ortszeit (=Sonnenzeit)" auseinanderzusetzen. Mehr dazu später im Text! Unbedingt notwendig ist darüber hinaus die Kenntnis der geographischen Koordinaten (Länge, Breite) des Ortes und Festlegung der exakten Nord-Süd-Richtung.

### **Geographische Koordinaten:**

Die Form unserer Sonnenuhr wird bestimmt von der geographischen **Breite** (Winkel des Himmelsnordpols zum Nordhorizont, etwa Höhe des Polarsterns über dem Nordhorizont). Von der geographischen **Länge** hängt ab, wie die "Sonnenuhrzeit" von der gesetzlichen Zeit (MEZ bzw. MESZ) abweicht.

Beide Daten sind mit hinreichender Genauigkeit jedem Schulatlas zu entnehmen.

Die "empirische Methode" zur Bestimmung der geographischen Breite: Miß die Höhe des Polarsterns über dem Nordhorizont (z.B. mit dem "Arme-Leute-Sextanten", vergl. Arbeitshilfe 19.13 des Schulbiologiezentrums).

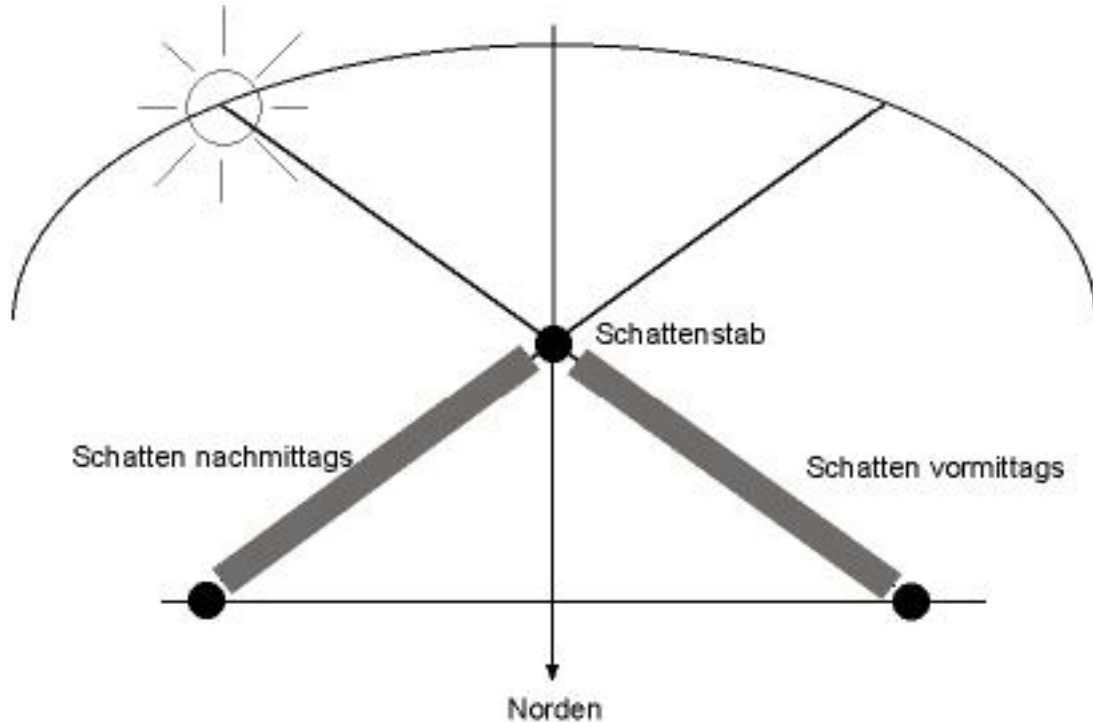
Die geographische Länge läßt sich aus der Zeitdifferenz zwischen dem lokalen Sonnenhöchststand und dem "Zeitzonenmittag" (12 Uhr Zonenzeit, hier MEZ) ermitteln. Um aber den genauen Kulminationszeitpunkt der Sonne bestimmen zu können, muß aber zunächst die exakte Nord-Süd-Linie gefunden werden. Wenn der Schatten eines senkrechten oder genau nach Norden geneigten Stabes nach Norden zeigt, hat die Sonne ihren "Höhepunkt" (im Süden) erreicht und es ist lokaler Mittag. In Hannover ist dies im Durchschnitt erst um 12 Uhr 21 min der Fall. Weitere Erläuterungen folgen später im Text. Die auf diese Weise gefundenen Ergebnisse werden zwar recht ungenau sein, für den praktischen (Schul-)Gebrauch reicht es aber allemal - und die Schüler haben mit Winkelmesser und Armbanduhr geographische und navigatorische Grundkenntnisse erworben.

Koordinaten Hannover  
 (Schulbiologiezentrum)  
**52° 24' N, 9° 42' O**  
 oder  
**52,4° N, 9,7° O**

### Der lokale Meridian, d.h. die genaue Nord-Süd-Linie am Ort

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die genaue Nordrichtung zu bestimmen:

- a) Sie benutzen den Kompaß. Dabei müssen Sie die örtliche Mißweisung beachten, in Hannover zur Zeit  $0,8^\circ$  W, der Nordpol liegt infolgedessen  $0,8^\circ$  östlich von Kompaß-Nord.
- b) Schlagen Sie einen Stab senkrecht (Wasserwaage!) in die Erde. Markieren Sie die Schattenrichtung zum Zeitpunkt der Kulmination der Sonne. Der lokale Sonnenhöchststand ist abhängig von der geographischen Länge und einem im Jahresverlauf schwankenden Wert (Zeitgleichung, s.u.). Im Anhang finden Sie die Kulminationszeitpunkte für Hannover tabellarisch aufgeführt. Wenn die Sonne ihren Höchststand im Süden erreicht, zeigt der Schatten des Stabes nach Norden.
- c) Benutzen Sie die schon in grauer Vorzeit bekannte geometrische Methode des "Indischen Kreises": Schlagen Sie einen senkrechten Schattenstab in die Erde. Messen Sie zu irgendeinem Zeitpunkt vormittags die Schattenlänge mit einem, am Stab befestigten Seil (Knoten). Markieren Sie diesen Punkt mit einem Stein. Führen Sie das Seil dem wandernden Schatten so lange nach, bis er nachmittags genauso lang ist, wie zum Zeitpunkt der ersten Messung. Dort legen Sie einen zweiten Stein hin. Jetzt können Sie beide Steine mit einem weiteren Seil verbinden. Halbieren Sie die Seillänge und konstruieren darauf mit einem weiteren Seil die Mittelsenkrechte durch den Schattenstab. Die Mittelsenkrechte ist die Nord-Süd-Linie.



### **Eine Horizontal-Sonnenuhr z.B. auf dem Schulhof:**

Das Zifferblatt liegt waagrecht, der Schattenstab (Gnomon) steht senkrecht (analematische Sonnenuhr). Der einfachste Schattenwerfer wäre ein aufrecht stehender Mensch, z.B. auf dem Pausenhof.

Wenn ich das Zifferblatt auf den Boden zeichnen will, muß ich herausfinden, wo die Sonne zu einer bestimmten Stunde am Himmel steht. Die Frage scheint vordergründig durch einfaches Messen lösbar zu sein. Nach einigen Wochen oder Monaten stellen wir aber fest, daß unsere Sonnenuhr reichlich "verstellt" ist.

Zum einen liegt das an der sich im Laufe des Jahres verändernden "wahren Sonnenzeit" (s. Zeitgleichung). Diese Abweichung von der mittleren Ortszeit läßt sich in der im Anhang abgedruckten Tabelle nachschlagen.

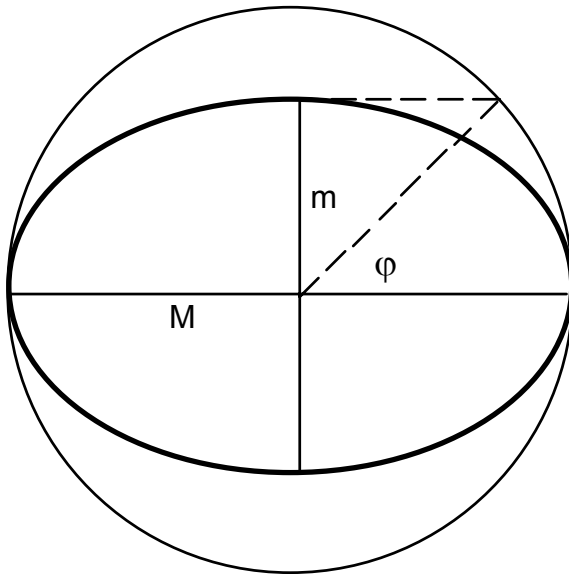
Der zweite (und den meisten Menschen wohl unbekannt) Grund ist der, daß der Schatten, den ein senkrechter Stab, ein Schornstein oder ein Fernsehturm zu einer bestimmten Uhrzeit auf eine horizontale Fläche wirft, auch bei Berücksichtigung der Zeitgleichung im Sommer nicht genau in die selbe Richtung zeigt wie im Winter. Am 21. Juni scheint die Sonne morgens um 6 Uhr (wahrer Sonnenzeit) aus ONO (75°), am 21. Dezember zur gleichen (wieder "wahren"! ) Zeit aus OSO (105°). Nur zu den Tag-und-Nachtgleichen (21.3 bzw. 23.9) steht sie um 6 Uhr genau im Osten.

Um diese Schwankung zu kompensieren, muß die Basis des Zeigers im Laufe des Jahres auf der Nord-Süd-Achse hin- und herwandern.

Alle zur Konstruktion der Sonnenuhr erforderlichen Werte lassen sich empirisch, d.h. durch geduldiges Beobachten über ein Jahr hinweg, feststellen. Es reicht aber aus, dies an vier Tagen zu tun, nämlich zum Beginn der Jahreszeiten (21.12, 21.3, 21.6. und 23.9).

Zum Zeitpunkt der Tag-und-Nachtgleiche am 21.3. bzw. am 23.9. steht der Schattenstab genau im Zentrum des Zifferblattes. Zur Sommersonnenwende (21.6.) ist er um den Betrag  $a$  nach Norden, zur Wintersonnenwende (21.12.) um den gleichen Betrag nach Süden verschoben. Der Wert  $a$  ist abhängig von der Größe und Form der Zifferblatt-Ellipse.

## Praktische Ausführung



Die Stundenpunkte der analemmatischen Sonnenuhr liegen nicht auf einem Kreis, sondern auf einer Ellipse, deren Exzentrizität abhängig von der geographischen Breite des Standorts ist. In hohen Breiten tendiert sie immer mehr zur Kreisform, am Äquator wird sie zum Strich.

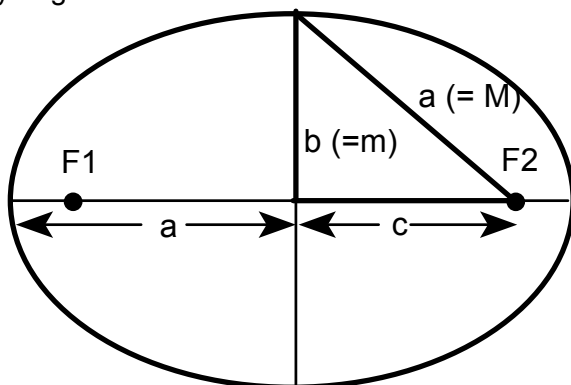
Das Verhältnis der großen Halbachse (M) zur kleinen Halbachse (m) entspricht dem Sinus der geographischen Breite  $\varphi$

Die kleine Halbachse m der benötigten Ellipse läßt sich nach dem abgebildeten Muster mit Zirkel, Geodreieck und Lineal bestimmen. Für Hannover gilt der Winkel  $\varphi$   $52^\circ 24'$  oder  $52,4^\circ$ .

### Konstruktion einer Ellipse

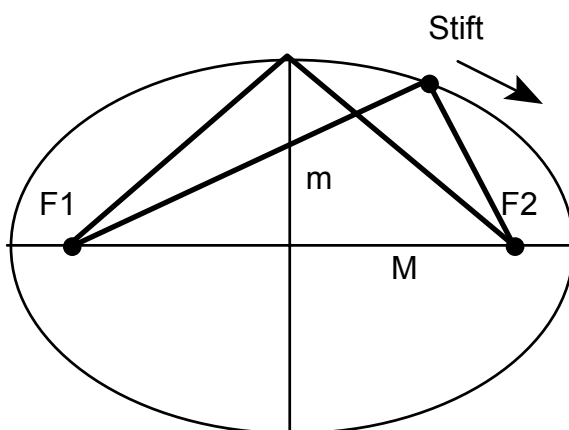
Wenn die Radien der großen und der kleinen Halbachse bekannt sind (s.o.), läßt sich die

Ellipse mit Hilfe eines Seils auf den Boden zeichnen. Erforderlich ist die Bestimmung der Ellipsenbrennpunkte. Sie haben die Entfernung  $2c$ . Den Wert  $c$  berechnen Sie mit Hilfe des Pythagoras:  $c^2 = a^2 - b^2$



Die Brennpunkte  $F_1$  und  $F_2$  haben sind auf der langen Achse jeweils  $c$  vom Mittelpunkt der Ellipse entfernt.

Bei der praktischen Ausführung auf dem Schulhof nehmen Sie ein Seil mit der Länge  $2a$  und befestigen die Enden in den Brennpunkten  $F_1$  und  $F_2$ . Mit Hilfe eines im Wendepunkt des straff gehaltenen Seils geführten Stifts beschreiben Sie die passende Ellipse.



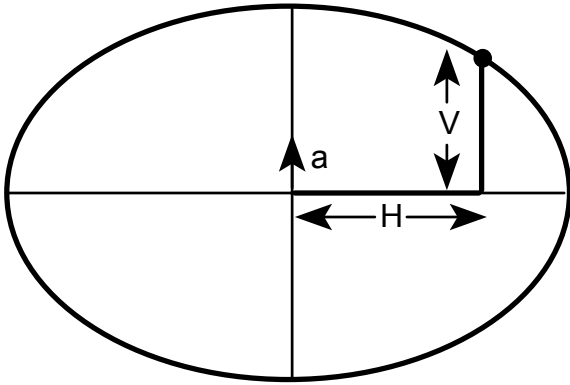
### Berechnung der Ellipse:

Lange Halbachse M

Kurze Halbachse  $m = \sin \varphi$  (geograph. Breite)

Für Hannover ( $52^\circ 24' = 52,4^\circ$ ) ist  $m = 0,79229$

Länge des Fadens =  $2 M$



### Festlegung der Stundenpunkte

Wenn Sie die Nord-Süd-Linie und die Ellipse auf den Boden gebracht haben, können Sie zum Zeitpunkt der Tag-und-Nachtgleichen (21. März bzw. 23. September) die Stundenpunkte festlegen, indem Sie den Schattenwurf eines vertikalen, im Zentrum der Ellipse aufgestellten Zeigers verfolgen. Beachten Sie dabei die Zeitgleichung (s.u.)!

Die Stundenpunkte lassen sich aber auch berechnen:

**Der horizontale Abstand H** zum Mittelpunkt

der Ellipse ist  $= \sin t$  ( $t$  = Stundenwinkel der Sonne).

	12 h	11 h	10 h	9 h	8 h	7 h	6 h
		13 h	14 h	15 h	16 h	17 h	18 h
t	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
H	0,000	0,259	0,500	0,707	0,866	0,966	1,000

**Der vertikale Abstand** der Stundenpunkte von der Achse M ist V.

V variiert mit der geographischen Breite (Hannover  $52^{\circ}24' = 52,4^{\circ}$ )

$V = \sin \varphi$  (geograph. Breite)  $\times \cos t$  (Stundenwinkel)

Für Hannover gilt:

	12 h	11 h	10 h	9 h	8 h	7 h	6 h
		13 h	14 h	15 h	16 h	17 h	18 h
t	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
V	0,792	0,765	0,686	0,560	0,396	0,205	0,000

H und V sind jeweils Teile von M. Ist M z.B. = 7 m, sind die Werte H und V mit 7 m zu multiplizieren:

**Beispiel:** Wir suchen den Stundenpunkt 16 h und entnehmen der Tabelle:  $H = 0,866$  und  $V = 0,396$ . Daraus folgt:  $0,866 \times 7 = 6,062$  m und  $0,396 \times 7 = 2,772$  m

**Die (veränderliche) Position des Schattenstabs** folgt der Formel

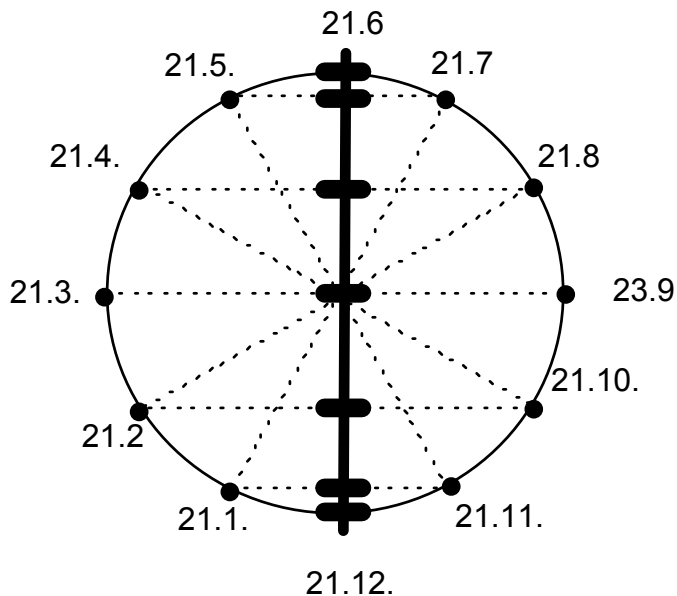
$a = \tan \delta$  (Deklination der Sonne)  $\times \cos \varphi$  (geograph. Breite), a ist ein Teil von M

Datum	$\delta$	a	Datum	$\delta$	a
1.1.	-23,13°	-0,261	1.7.	+23,0°	+0,259
1.2.	-17,3°	-0,190	1.8.	+18,0°	+0,198
1.3.	-8,0°	-0,086	1.9.	+8,5°	+0,091
21.3.	0,0°	0	23.9.	0,0°	0
1.4.	+4,25°	+0,045	1.10.	-2,9°	-0,031
1.5.	+15,0°	+0,163	1.11.	-14,0°	-0,152
1.6.	+22,0°	+0,247	1.12.	-21,7°	-0,243
21.6.	+23,48°	+0,265	21.12.	-23,48°	-0,265

### Position des Schattenwerfers im Laufe des Jahres (geometrisch abgeleitet)

Wenn Sie auf die Mathematik ganz verzichten wollen, können Sie am 21. Juni und am 21. Dezember den Punkt, auf dem Sie als Schattenwerfer stehen sollten, mit Hilfe der Sonne finden. Stellen Sie sich zu jeder vollen Stunde wahrer Ortszeit (s.u.) so auf der Nord-Süd-Linie auf, daß Ihr Schatten auf den entsprechenden Stundenpunkt fällt. Dieser Punkt ist a vom Zentrum entfernt.

Übrigens: Wenn Sie dies ein paar Tage vor oder nach den genannten Daten tun, ist das nicht weiter schlimm, weil die Sonne in dieser Zeit ihre Position am Himmel kaum verändert.



Wenn Sie die Positionen des Schattenwerfers für den Frühlings-, Herbst-, Sommer- und Winteranfang markiert haben, bereitet das Einzeichnen der anderen Monate keine größeren Schwierigkeiten mehr. Das Hin- und Herpendeln des Schattenwerfers stellt eine Sinusfunktion (abgeleitet aus dem Kreis) dar:

- Ziehen Sie um den Mittelpunkt der Sonnenuhr einen Kreis mit dem Radius  $a$  (s.o.).
- Teilen Sie den Kreis in 12 gleiche Teile
- Tragen Sie (im Uhrzeigersinn) die Monate (jeweils den 21. d.M.) auf dem Kreisumfang ein.

- Verbinden Sie die gegenüber liegenden Monatsmarkierungen miteinander.
- Die Schnittpunkte der Linien mit der N-S-Achse ergeben die Monatsmarkierungen.

**Mittlerer Sonnentag:** Mittlerer Zeitraum zwischen zwei Höchstständen der Sonne, Grundlage der "bürgerlichen Zeit".

Die Sonne verschiebt sich durch die Jahresbewegung der Erde aus unserer Perspektive täglich um ca.  $1^\circ$  in östliche Richtung (bezogen auf den Sternenhintergrund), das entspricht ca. 2 Sonnenscheiben. Der mittlere Sonnentag ist daher länger als der Sterntag (24h 3m 36,555s).

**Wahrer Sonnentag:** Tatsächlicher Zeitraum zwischen zwei Höchstständen der Sonne.

Die elliptische Form der Erdumlaufbahn führt zu unterschiedlichen Bahngeschwindigkeiten der Erde: Am größten ist sie in Sonnennähe (Perihel  $\approx$  2. Januar, 147,1 Mill. km Entfernung), am geringsten in Sonnenferne (Aphel,  $\approx$  5. Juli, 152,1 Mill. km). Dadurch ändert sich die Länge des wahren Sonnentages ständig.

**Mittlere Zonenzeit:** Die Erde rotiert in ca. 24 h um ihre Achse, in einer Stunde um  $15^\circ$  in östliche Richtung ( $360^\circ : 24 \text{ h} = 15^\circ$ ). Als "Nullpunkt" gilt der Meridian von Greenwich (Länge  $0^\circ$ ), er ist zugleich der Bezugsmeridian für die Greenwich Mean Time (heute UTC Universal Time Coordinated). Der Bezugsmeridian für die Mitteleuropäische Zeit ist der 15. östliche Längengrad (z.B. Görlitz). 12 Uhr MEZ bedeutet: Die mittlere Sonne kulminiert über dem 15. östl. Längengrad. Sommerzeit: MESZ, MEZ + 1h

**Mittlere Ortszeit (MOZ):** Tatsächliche mittlere Sonnenzeit an einem Ort. Hannover liegt auf 9° 42' östlicher Länge, die Zeitdifferenz zu 15° östl. Länge beträgt ca. 21min. Die mittlere Sonne kulminiert in Hannover erst um 12h 21 min.

Die lokale Zeitdifferenz zu MEZ berechnet sich wie folgt:

Hannover (SBZ) liegt auf 9°42' östlicher Länge: Dies bedeutet 5°18' Unterschied.

15° = 60min

1m = 15 : 60 = 0,25° = 15'

5° = 20 x 15' = 20min

15° = 60min = 3600s

1s = 15° : 3600s = 0,004166667° = 15''

17' = 72 x 15'' = 72s

20min + 72s = 21min 12s

Die **mittlere Ortszeit (MOZ)** in Hannover ist also

$$\text{MOZ} = \text{MEZ} - 21\text{min } 12\text{s}$$

**Zeitgleichung:** Differenz zwischen der wahren und der mittleren Sonnenzeit.

Maximalwerte - 14min 24s am 12. Februar (Sonnenuhr geht um diesen Zeitbetrag nach, weil die Sonne entsprechend später ihren Höchststand im Süden erreicht) und + 16min 21s am 3. November (Sonnenuhr geht vor)

Keine Differenz tritt auf um den 15. April, den 15. Juni, den 31. August und den 25. Dezember (Zeitgleichung = 0)

**Wahre Ortszeit (WOZ):** Tatsächliche Sonnenzeit an einem Ort unter Berücksichtigung der Zeitgleichung.

WOZ = MOZ - Zeitgleichung

Beispiel: Am 17. März beträgt die Zeitgleichung - 9min. Wann kulminiert die Sonne in Hannover?

Kulmination: 12h + 21min - (-9min) = 12h + 21min + 9min = 12h 30min

**Zeitangaben auf der Sonnenuhr:** Sonnenuhren auf der Nordhalbkugel sind nach Süden ausgerichtet und zeigen die wahre Ortszeit (= wahre Sonnenzeit) an. In Hannover gehen sie daher um 21 Minuten - Zeitgleichung nach (bezogen auf die gesetzliche Zeit).

Beispiel: Eine Sonnenuhr in Hannover zeigt am 17. März 15h 30min an. Zeitgleichung - 9min. Wie spät ist es nach gesetzlicher Zeit?

WOZ + 21min - Zeitgleichung = MEZ

15h 30min + 21min - (- 9min) = 16h

Achtung: Im Sommer gilt die Mitteleuropäische Sommerzeit (MESZ), d.h. die Sonnenuhr geht im Mittel 1h + 21min - Zeitgleichung nach.

Ingo Mennerich, Schulbiologiezentrum Hannover, Dezember 98

## Anlage

### Jahresgang der Zeitgleichung und des Kulminationszeitpunktes der Sonne für Hannover (9°42' östl. Länge)

Erste Zeile: Zeitgleichung, zweite Zeile: Kulmination in Hannover

Achtung: Sommerzeit nicht berücksichtigt!

<b>1.1.</b>	<b>5.1</b>	<b>10.1</b>	<b>15.1.</b>	<b>20.1.</b>	<b>25.1.</b>	<b>1.2.</b>	<b>5.2.</b>	<b>10.2.</b>	<b>15.2.</b>	<b>20.2.</b>	<b>25.2.</b>
-4 12h 25	-5 12h 26	-7 12h 28	-9 12h 30	-11 12h 32	-12 12h 33	-14 12h 35	-14 12h 35	-14 12h 35	-14 12h 35	-14 12h 35	-13 12h 34
<b>1.3.</b>	<b>5.3.</b>	<b>10.3.</b>	<b>15.3.</b>	<b>20.3.</b>	<b>25.3.</b>	<b>1.4.</b>	<b>5.4.</b>	<b>10.4.</b>	<b>15.4.</b>	<b>20.4.</b>	<b>25.4.</b>
-12 12h 33	-12 12h 33	-10 12h 31	-9 12h 30	-8 12h 29	-6 12h 27	-4 12h 25	-3 12h 24	-1 12h 22	0 12h 21	+1 12 h 20	+2 12h 19
<b>1.5.</b>	<b>5.5.</b>	<b>10.5.</b>	<b>15.5.</b>	<b>20.5.</b>	<b>25.5.</b>	<b>1.6.</b>	<b>5.6.</b>	<b>10.6.</b>	<b>15.6.</b>	<b>20.6.</b>	<b>25.6.</b>
+3 12h 18	+3 12h 18	+4 12h 17	+4 12h 17	+4 12h 17	+3 12h 18	+2 12h 19	+2 12h 19	+1 12h 20	0 12h 21	-1 12h 22	-3 12h 24
<b>1.7.</b>	<b>5.7.</b>	<b>10.7.</b>	<b>15.7.</b>	<b>20.7.</b>	<b>25.7.</b>	<b>1.8.</b>	<b>5.8.</b>	<b>10.8.</b>	<b>15.8.</b>	<b>20.8.</b>	<b>25.8.</b>
-4 12h 25	-5 12h 26	-5 12h 26	-6 12h 27	-6 12h 27	-6 12h 27	-6 12h 27	-6 12h 27	-5 12h 26	-4 12h 25	-3 12h 24	-2 12h 23
<b>1.9.</b>	<b>5.9.</b>	<b>10.9.</b>	<b>15.9.</b>	<b>20.9.</b>	<b>25.9.</b>	<b>1.10.</b>	<b>5.10.</b>	<b>10.10.</b>	<b>15.10.</b>	<b>20.10.</b>	<b>25.10.</b>
0 12h 21	+1 12h 20	+3 12h 18	+5 12h 16	+7 12h 14	+8 12h 13	+10 12h 11	+12 12h 09	+13 12h 08	+14 12h 07	+15 12h 06	+16 12h 05
<b>1.11.</b>	<b>5.11.</b>	<b>10.11.</b>	<b>15.11.</b>	<b>20.11.</b>	<b>25.11.</b>	<b>1.12.</b>	<b>5.12.</b>	<b>10.12.</b>	<b>15.12.</b>	<b>20.12.</b>	<b>25.12.</b>
+16 12h 05	+16 12h 05	+16 12h 05	+15 12h 06	+14 12h 07	+13 12h 08	+11 12h 10	+9 12h 12	+7 12h 14	+5 12h 16	+2 12h 19	0 12h 21

Daten nach KELLER, "Das Himmelsjahr 1998", Frankh-Kosmos Verlags-GmbH, Stuttgart